

Inhalt

0. Begrifflichkeiten.....	1
1. Einfache Zinsrechnung (lineare Verzinsung)	3
1.1 Jährliche lineare Verzinsung.....	3
1.2 Unterjährige lineare Verzinsung	4
2. Zinseszinsrechnung (exponentielle Verzinsung).....	5
2.1 Jährliche exponentielle Verzinsung.....	5
2.2 Unterjährige exponentielle Verzinsung.....	6
3. Rentenrechnung	7
3.1 Rentenperiode = Zinsperiode	7
3.2 Zinsperiode > Rentenperiode	8
4. Äquivalenzprinzip.....	10

0. Begrifflichkeiten

Zinsen = Nutzungsentgelt für (zeitlich befristete) Kapitalüberlassung.

Zinstermine (= Zinszuschlagtermin = Zinsverrechnungstermin) = Zeitpunkte, zu denen die Zinsen fällig werden.

Zinsperiode = Zeitraum zwischen zwei Zinszuschlagterminen.

Die Höhe der Zinsen hängt ab

- (1) vom Kapitalbetrag, der verzinst wird,
- (2) vom vereinbarten Zinssatz,
- (3) von der Dauer der Kapitalüberlassung (Laufzeit),
- (4) von der Art der Zinsberechnung.

Der Zinssatz i (vom engl. interest) gibt an, wie viel Zinsen für eine überlassene Geldeinheit zu zahlen sind.

Übliche Schreibweisen: $i = 0,05$ oder $i = 5\%$.

In der Regel bezieht sich der angegebene Zinssatz auf die Zeitspanne eines Jahres, erkennbar am Zusatz „p.a.“ („pro anno“ oder „per annum“).

Die Größe p bezeichnet den Zinsfuß. Dieser gibt an, wie viel Zinsen für 100 überlassene Geldeinheiten zu zahlen sind.

Somit gilt $i = p/100$ (z.B. $p = 5 \rightarrow i = 5/100 = 0,05 = 5\%$).

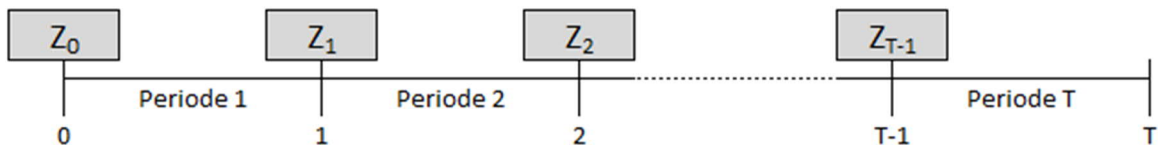
K_0 bezeichnet im Fall einer Kapitalanlage den anfänglichen Stand des Kapitals, im Falle einer Kapitalaufnahme den anfänglichen Schuldenstand.

K_n bezeichnet den Stand des Kapitals bzw. der Schuld am Ende des betrachteten Zeitraums von n Perioden (Endwert).

Verzinsungsmodelle	
Lineare (einfache) Verzinsung	Zinseszins (exponentielle Verzinsung)
Zinsen werden zeitanteilig verrechnet und erst am Ende der Laufzeit dem Kapital zugeschlagen.	Zinsen werden nach jeder Zinsperiode dem Kapital hinzugefügt und tragen von da an selbst wieder Zinsen.
Innerhalb der Laufzeit existiert kein Zinszuschlagtermin.	Innerhalb der Laufzeit liegen ein oder mehrere Zinszuschlagtermine.

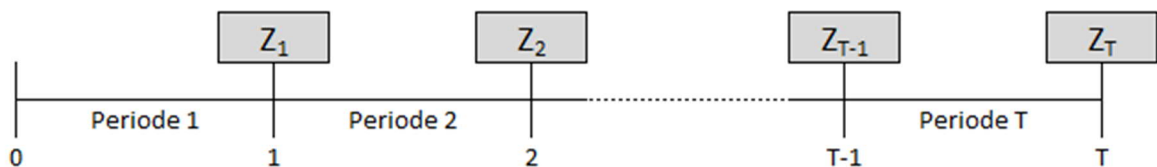
Vorschüssige Zahlungen:

Die Zahlungen Z_0, Z_1, \dots, Z_{T-1} erfolgen jeweils zu Beginn der Perioden 1, ..., T.



Nachschüssige Zahlungen:

Die Zahlungen Z_1, Z_2, \dots, Z_T erfolgen jeweils am Ende der Perioden 1, ..., T.



1. Einfache Zinsrechnung (lineare Verzinsung)

1.1 Jährliche lineare Verzinsung

E1.1-1 Ein Investor legt heute (zum Zeitpunkt $t = 0$) einen Betrag von 300 € für drei Jahre an. Der Zinssatz beträgt 4% p.a. bei einfacher Verzinsung. Wie entwickelt sich das Vermögen im Zeitablauf?

Zeitpunkt t	Kapital K_t	Zinsen für die Periode $[t; t+1]$
0		
1		
2		
3		

Wie kann der am Laufzeitende fällige Betrag direkt aus dem Anfangskapital ermittelt werden?

$$K_n =$$

E1.1-2 Ein Schuldner zahlt an den Gläubiger den Geldbetrag von 11.970 EUR und tilgt damit seine Schuld einschließlich der Zinsen. Wie hoch war die ursprüngliche Schuld, wenn er das Geld vor 4 Jahren mit 6,5% p.a. Zinsen von einem Freund ausgeliehen hat?

E1.1-3 Für ein zu gleichen Teilen vererbtes Grundstück im Wert von 24.000 EUR zahlt der Nutzer an seinen Miterben, der auf die Nutzung verzichtet hat, zu einem späteren Zeitpunkt einen Betrag von 15.315 EUR. Wann wurde das Grundstück übertragen, wenn 4,25% p.a. Zinsen vereinbart waren?

E1.1-4 Bei welcher Laufzeit würde sich ein Kapital bei 8% p.a. und einfachen Zinsen verdoppeln?

E1.1-5 Eine Erbschaft von 55.000 EUR, welche in 3 Jahren auszuzahlen ist, wird unter Abzug von 4% jährlichen Zinsen schon heute ausgezahlt. Welcher Betrag kann dem Berechtigten ausgezahlt werden?

E1.1-6 Für eine Geldanlage gelten folgende Bedingungen:

Der Anleger zahlt beim Kauf einen geringeren Betrag, als er später bei Einlösung am Fälligkeitstag zurückerhält. Die Zinsen für die Zeit vom Tag der Kaufpreiszahlung bis zum Fälligkeitstag werden im Voraus vom Nennwert abgezogen. Die Abschlagsprozentsätze pro Jahr („Verkaufszinssätze“) betragen bei einer Laufzeit von einem Jahr 3,66%, bei einer Laufzeit von 2 Jahren 3,55%.

- a) Welcher Kaufpreis ist jeweils zu zahlen für einen Nennwert von 500 EUR
 - a. bei einer Laufzeit von genau 1 Jahr und einem Verkaufszinssatz von 3,66%,
 - b. bei einer Laufzeit von genau 2 Jahren und einem Verkaufszinssatz von 3,55%?
- b) Welche Verzinsung erreichte der Käufer bei einjähriger Laufzeit?

1.2 Unterjährige lineare Verzinsung

Problemstellung: Wie hoch ist der Zinsbetrag, wenn ein nachschüssiger Jahreszinssatz vereinbart worden ist und seit der Anlage eines Anfangskapitals K_0 weniger als ein Jahr vergangen ist?

$$Z = K \times \frac{p}{100} \times \frac{\text{Laufzeit}}{\text{Jahreslänge}}$$

In unterschiedlichen Anwendungsbereichen sind unterschiedliche Zinskonventionen üblich.

	30/360	act/act	act/360
Laufzeit (Zinstage)	grundsätzlich 1 Monat = 30 Tage	kalendermäßig	kalendermäßig
Jahreslänge	360 Tage	kalendermäßig	360 Tage
Anwendungsbereich	Sparkonten, Kontokorrentkonten, Festgeldkonten, Ratenkredite, langfristige Darlehen	Kapitalmarkt, deutsche bürgerliche Zinsrechnung	Geldmarkt, Anleihen mit variabler Verzinsung (FRN)

E1.2-1 Berechnen Sie die Zinsen für einen Kapitalbetrag von 10 Mio. € bei einem Zinssatz von 2% p.a., Laufzeit 01.07.(einschließlich) bis 31.12. (einschließlich).

- nach 30/360-Tage-Methode
- nach act/act-Methode
- nach act/360-Tage Methode

E1.2-2 Auf einem Kontokorrentkonto ergaben sich im Verlaufe des ersten Quartals die folgenden Salden:

Wert	Saldo	Tage	S#	Ü#
31.12.01	S 1.500,00			
16.01.02	S 4.000,00			
22.02.02	S 3.500,00			
05.03.02	S 7.000,00			
17.03.02	S 6.500,00			

Der Sollzinssatz betrug 12% p.a., der Zinssatz für geduldete Überziehungen 16% p.a. Es stand eine Kreditlinie in Höhe von 4.000 € zur Verfügung.

Wie hoch ist die Zinsbelastung am Quartalsende?

2. Zinseszinsrechnung (exponentielle Verzinsung)

2.1 Jährliche exponentielle Verzinsung

E2.1-1 Ein Investor legt heute (zum Zeitpunkt $t = 0$) einen Betrag von 300 € für drei Jahre an. Der Zinssatz beträgt 4% p.a. Die Zinsen werden am Ende eines jeden Laufzeitjahres dem Kapital zugeschlagen und im Folgejahr mit verzinst. Wie entwickelt sich das Vermögen im Zeitablauf?

Zeitpunkt t	Kapital K_t	Zinsen für die Periode $[t; t+1]$
0		
1		
2		
3		

Wie kann der am Laufzeitende fällige Betrag direkt aus dem Anfangskapital ermittelt werden?

$K_n =$

E2.1-2 Welchen Betrag müssen Sie zu Jahresbeginn auf einem Sparkonto mit 3% p.a. Verzinsung anlegen, wenn Sie 5 Jahre später über 20.000 EUR verfügen wollen?

E2.1-3 Wie hoch ist die effektive Verzinsung Ihres Kapitals, wenn Sie heute 12.000 EUR anlegen und in genau 6 Jahren 18.571,36 EUR zurückerhalten?

E2.1-4 Über wie viel Jahre müssen einen Betrag von 8.000 EUR anlegen, damit bei einer Verzinsung von 6% p.a. ein Endkapital in Höhe von 12.029,04 EUR bereitsteht?

E2.1-5 In welchem Zeitraum verdoppelt sich ein Kapital bei einer Anlage zu 8% p.a. bei einer Verzinsung mit Zinseszins?

E2.1-6 Welche effektive Verzinsung wurde bei zweijähriger Geldanlage aus Aufgabe E1.1-6 erreicht?

E2.1-7 Ein Geldbetrag wird zunächst 2 Jahre lang mit 3% p.a., dann weitere 4 Jahre mit 3,5% p.a. und schließlich noch weitere 6 Jahre mit 4% p.a. mit Zinseszins verzinst. Wie hoch ist die effektive Verzinsung über den gesamten Anlagezeitraum?

E2.1-8 Ein Anfangskapital von 10.000 EUR ist innerhalb von 5 Jahren auf 12.000 EUR gewachsen. Welcher Endwert ist nach weiteren 5 Jahren zu erwarten, wenn sich die Verzinsung nicht ändert?

2.2 Unterjährige exponentielle Verzinsung

Bei unterjähriger Verzinsung ist die Zinsperiode kürzer als ein Jahr; es erfolgen innerhalb des Jahres also mehrere Verzinsungen mit den daraus resultierenden Zinseszinsseffekten

Das Jahr wird dabei gewöhnlich in m gleich lange Zinsperioden unterteilt. Nach jeder Zinsperiode werden die Zinsen berechnet, indem ein m -tel des nominellen Jahreszinssatzes i_{nom} angewandt wird.

$$\text{relativer Periodenzinssatz} = j_m = \frac{i_{nom}}{m}$$

Die so ermittelten Zinsen werden dem Kapital zugeschlagen und in der folgenden unterjährigen Zinsperiode mitverzinst.

E2.2-1 Welche Endwerte K_1 ergeben sich bei einem Anfangskapital $K_0 = 100.000$ € nach einem Jahr in Abhängigkeit von der Anzahl der Zinsperioden m bei einem nominellen Zinssatz $i_{nom} = 4\%$ p.a.? Wie hoch ist der jeweilige effektive Jahreszinssatz i_{eff} ?

	$m = 1$	$m = 2$	$m = 3$	$m = 4$
K_1				
i_{eff}				

E2.2-2 Für einen Dispositionskredit gilt ein Sollzinssatz von 11% p.a. Wie hoch ist der tatsächliche (= "effektive") Jahreszinssatz, wenn das Konto vierteljährlich oder monatlich abgerechnet wird?

E2.2-3 Sie haben Ihr Geld auf einem Termingeldkonto „geparkt“, wo es mit 3% p.a. verzinst wird. Der Anlagezeitraum beträgt 1 Monat. Mit Ihrer Bank haben Sie vereinbart, dass eine automatische Verlängerung (Prolongation) erfolgt, wenn Sie keine anderslautende Weisung erteilen. Zwischenzeitlich aufgelaufene Zinsen sollen dann dem Kapital zugeschlagen und mit verzinst werden.

Welche effektive Verzinsung erreichen Sie bei unverändertem Zinssatz?

E2.2-4 Welcher Zeitpunkt einer Sparkontoeröffnung maximiert die erreichbare Rendite?

E2.2-5 Ein Investor legt 300 € zum nominellen Zinssatz von 4% p.a. an. Die Verzinsung erfolgt unterjährig bei 6 Zinsterminen pro Jahr. Wie hoch ist der Endwert nach fünf Jahren?

E2.2-6 Welchen Betrag müssen Sie zu Jahresbeginn auf einem Sparkonto mit einem Nominalzinssatz von 3% p.a. und vierteljährlicher Verzinsung anlegen, wenn Sie 5 Jahre später über 20.000 EUR verfügen wollen?

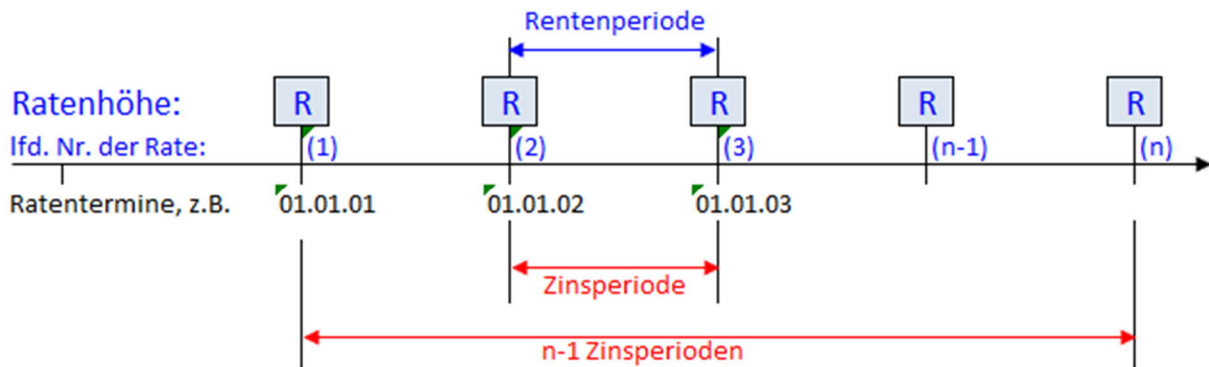
E2.2-7 Sie können Ihr Geld zu 3,5% p.a. bei jährlicher Verzinsung anlegen. Alternativ können Sie auch eine Anlageform mit vierteljährlicher Verzinsung wählen. Wie hoch müsste der nominelle Jahreszinssatz sein, damit Sie die gleiche effektive Verzinsung wie bei jährlicher Verzinsung erreichen?

E2.2-8 Einem Kreditnehmer werden zwei Verzinsungsarten zur Auswahl angeboten: entweder 8% p.a. bei vierteljährlicher Verzinsung oder 8,2% bei jährlicher Verzinsung. Welche Variante empfehlen Sie dem Kreditnehmer?

3. Rentenrechnung

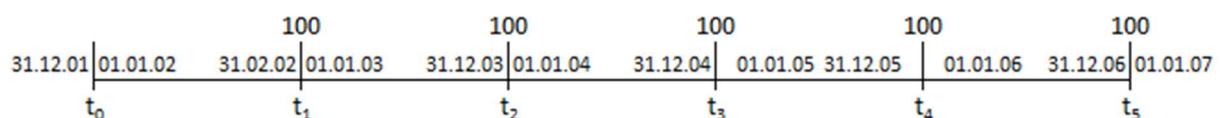
Eine n-malige Rente ist eine Zahlungsreihe, die aus n gleichbleibenden Zahlungen (Raten) der Höhe R besteht, die in gleichen Zeitabständen aufeinander folgen.

3.1 Rentenperiode = Zinsperiode



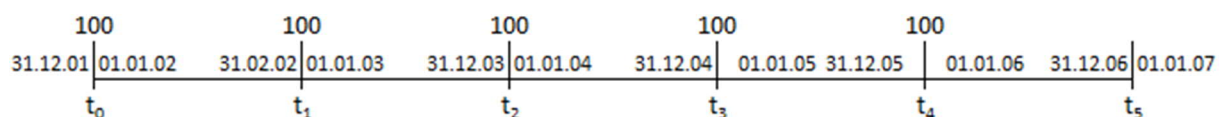
Bei n Ratenterminen liegen zwischen der 1. Rate und der letzten Rate genau n-1 Zinsperioden.

E3.1-1 In der Silvesternacht 01/02 fasst Student LUSTIG einen eisernen Sparbeschluss: Weil er im Verlaufe des Jahres 02 sein Studium erfolgreich abzuschließen und anschließend einen gut dotierten Job anzutreten gedenkt, will er künftig Konsumverzicht üben: Er hat beschlossen, ab Anfang 03 jeweils zu Jahresbeginn fünfmal einen gleichbleibenden Betrag in Höhe von 100 EUR auf seinem Sparkonto zu 3% p.a. anzulegen.



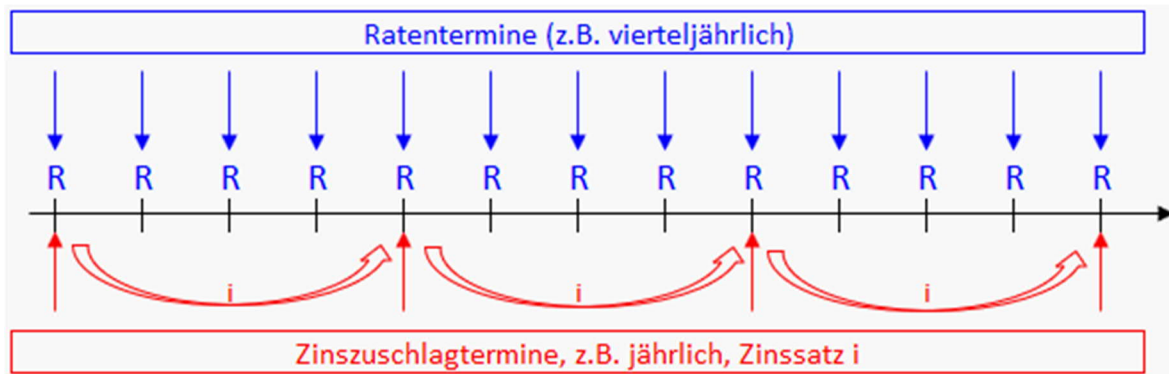
Über welchen Geldbetrag könnte er dann Anfang 07 verfügen, wenn er es tatsächlich schafft, sein ehrgeiziges Ziel zu realisieren?

E3.1-2 Über welchen Geldbetrag könnte er Anfang 07 verfügen, wenn er sein Vorhaben eskaliert und seine 5-Jahres-Ansparaktion bereits Anfang 02 beginnt?



- E3.1-3 Welchen Betrag müsste er in fünf Jahresraten - beginnend Anfang 03 - anlegen, damit er Anfang 07 über 20.000 EUR verfügen kann?
- E3.1-4 Wie hoch wäre die erforderliche Sparrate, wenn er bereits Anfang 02 mit seinem Vorhaben beginnt, um nach Zahlung von 5 Raten und einem Wartejahr Anfang 07 über 20.000 EUR verfügen zu können?
- E3.1-5 Weil ihm als Gastgeber der Party momentan sowohl Getränke als auch Geld ausgegangen sind, kommt LUSTIG auf eine noch viel genialere Idee:
Viel angenehmer wäre es doch, die künftig möglichen Ersparnisse bereits heute zu verprassen. Seine Kommilitonen unterstützen ihn in diesem Vorhaben, denn ihr Durst ist mindestens so groß wie ihr Vertrauen in LUSTIGs künftige Zahlungsfähigkeit. Bei einem Zinssatz von 3% p.a. sind sie bereit, Lustig sofort den Gegenwert für die ab Anfang 03 erwarteten fünf aufeinanderfolgenden Ratenzahlungen in Höhe von je 100 EUR bereitzustellen. Wie viel Geld kommt auf diese Weise zusammen?
- E3.1-6 Nebenbei: Wie hoch wäre der Barwert der Rente, wenn sie vorschüssig gezahlt werden würde?
- E3.1-7 Zurück zu LUSTIGs Überlegung in Frage E3.1-5. Eigentlich reichen für die Beendigung der laufenden Veranstaltung – scharf kalkuliert – 25,02 EUR. Den Rest des soeben vereinnahmten Geldes könnte LUSTIG verwenden, um einem seiner Mitstudenten aus dessen finanziellem Engpass zu helfen. LUSTIG würde ihm den betreffenden Betrag zu 5% p.a. als Darlehen überlassen. Wie würde LUSTIGs künftige Liquiditätsrechnung aussehen, wenn dieses Darlehen durch fünf gleiche Raten bedient werden würde? Die erste Rate wäre Anfang 03 fällig.
- E3.1-8 Sie möchten in neun Jahren 10.000 € angespart haben. Die Bank garantiert Ihnen einen konstanten Zinssatz von 3% p.a. bei jährlicher Verzinsung.
Welchen Betrag müssen Sie gleich zu Beginn anlegen, wenn Sie – beginnend in einem Jahr, letztmalig nach neun Jahren – jedes Jahr zusätzlich 700 € ansparen können?

3.2 Zinsperiode > Rentenperiode



E3.2-8 Ein Sparer legt regelmäßig am Monatsende 100 EUR auf einem Sparkonto an, wo das Geld im Verlaufe des Jahres linear mit 3% p.a. verzinst wird. Zum jeweiligen Jahresende erfolgt die Zinskapitalisierung. Er beginnt damit im Januar des Jahres 01.

- Wie hoch ist der Kontostand nach erfolgter Zinskapitalisierung am Ende des Jahres 01? Über welches Kapital kann er am Ende des Jahres 10 verfügen?
- Wie hoch wäre sein Endkapital zum Jahresende 01 bzw. 10, wenn er einen Monat früher (also genau zu Jahresbeginn) mit der Realisierung seines Sparplans beginnen würde?

E3.2-9 Wie hoch ist der Barwert einer monatlichen Rente in Höhe von 1.000 €, die 15 Jahre lang vorschüssig gezahlt wird? ($i = 2,0\%$ p.a.)

E3.2-10 Ein heute 55-jähriger hat in 10 Jahren Anspruch auf eine monatliche vorschüssige Betriebsrente von 600 €. Durch welche Gegenleistung kann diese heute bei einem Zinssatz von 4% p.a. abgelöst werden, wenn eine Lebenserwartung von 77 Jahren angenommen wird?

E3.2-11 Wie viel Vermögen benötigen Sie bei einer Rendite von 4%, damit Sie zu jedem Monatsende 500 € ohne Kapitalverzehr entnehmen können?

4. Äquivalenzprinzip

Zwei Zahlungen oder Zahlungsreihen dürfen nur dann

1. verglichen (im Sinne der Äquivalenz)
2. addiert
3. subtrahiert

werden, wenn zuvor sämtliche vorkommende Zahlungen auf ein und denselben Stichtag auf-/abgezinst wurden.

E4-1 Sie stehen vor der Wahl, ein Geschenk über 1.000 € bereits heute anzunehmen oder noch fünf Jahre zu warten, um dann 1.216,65 € geschenkt zu bekommen.

Der Zinssatz, zu dem Sie Ihr Kapital für 5 Jahre anlegen könnten, sei 4% p.a.

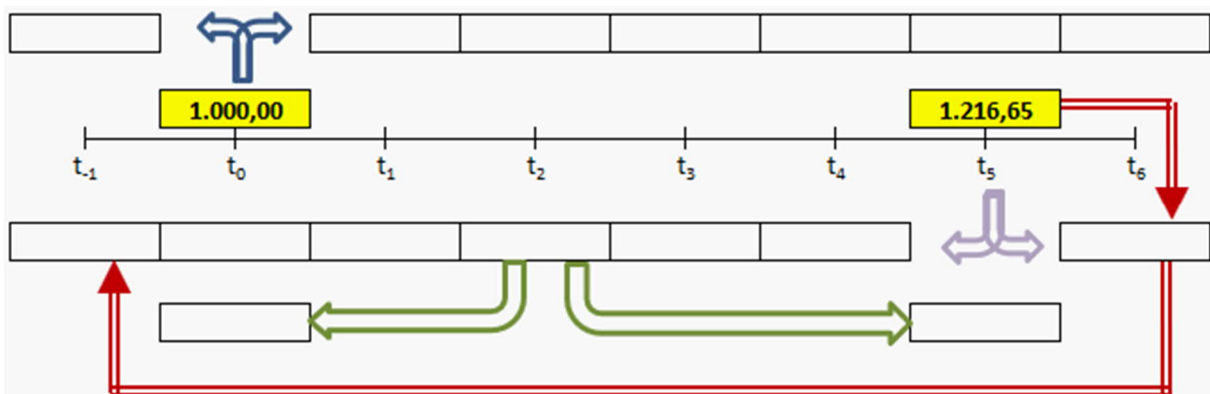
Wofür entscheiden Sie sich, wenn Sie das Geld nicht unbedingt schon heute benötigen?



Zwei Zahlungen K_n und K_0 sind äquivalent, wenn mit dem relevanten Zinssatz i gilt:

$$K_n = K_0 \cdot (1 + i)^n$$

E4-2 Sind zwei Zahlungen oder Zahlungsreihen äquivalent bezüglich eines Zeitpunktes, so sind sie es auch bezüglich jedes anderen Zeitpunktes. Beim Auf-/Abzinsen einer Zahlung bzw. eines vorher ermittelten Zeitwerts auf einen gewählten Stichtag dürfen beliebige Verzinsungsstufen oder -Umwege gemacht werden.



Von besonderer Praxisrelevanz ist die Frage, unter welchen Bedingungen eine Zahlung (oder Zahlungsreihe) zu einer anderen Zahlung (oder Zahlungsreihe) äquivalent ist.

E4-3 Sie erwarten einen Zahlungsstrom mit folgenden sicheren Einzahlungen:

In einem Jahr 400 €, in zwei Jahren 550 €, in drei Jahren 800 €.

Welche äquivalente Gegenleistung müssten Sie bei einem Zinssatz von 10% p.a. erbringen, ...

- a) ... wenn diese heute zu zahlen wäre?
- b) ... wenn diese in drei Jahren zu erbringen wäre?
- c) ... wenn sie in 6 Jahren fällig wäre?

E4-4 Herr Klug ist privat krankenversichert. Er bezahlte bisher zu jedem Monatsersten eine Prämie in Höhe von 700 Euro. Nun überlegt er, den Zahlungsmodus zu ändern und seine Prämie in einem Betrag gleich zu Jahresbeginn zu zahlen, falls ihm ein Nachlass eingeräumt wird. Wie hoch dürfte die Jahreszahlung ausfallen, wenn er mit einem Effektivzinssatz von 3% p.a. kalkuliert und dabei unterjährige Zinseszinsrechnung unterstellt?

E4-5 Bei einer heutigen Anlage von 100 € werden Sie als Gegenleistung in 4 Jahren einen Betrag von 122 € erhalten.

- a) Prüfen Sie die Äquivalenz von Leistung und Gegenleistung bei einem Kalkulationszinssatz von 8% p.a.
- b) Welcher Zinssatz führt zur Äquivalenz von Leistung und Gegenleistung?

E4-6 Als Gegenleistung für eine heute zu leistende Zahlung in Höhe von 9.800 € wird ein Zahlungsstrom angeboten, der aus drei Zahlungen besteht: in einem Jahr 300 €, in zwei Jahren 300 €, in drei Jahren 10.300 €.

- c) Prüfen Sie die Äquivalenz von Leistung und Gegenleistung bei einem Kalkulationszinssatz von 4% p.a.
- d) Welcher Zinssatz führt zur Äquivalenz von Leistung und Gegenleistung?