Formelsammlung zur Finanzmathematik

1. Einfache Zinsrechnung (lineare Verzinsung)

1.1 Berechnung des Endwerts einer Einmalanlage bei linearer ganzjähriger Verzinsung nach n Verzinsungsjahren

$$K_n = K_0\left(1 + \frac{p}{100}n\right) = K_0(1 + i \bullet n)$$

1.2 Berechnung des Endwerts, der bei unterjähriger linearer Verzinsung nach m Zinstagen erreicht wird

$$K_m = K_0\left(1 + i \bullet \frac{m}{\text{Jahreslänge in Tagen}}\right)$$

Je nach Zinsrechnungsmethode werden die Jahresbruchteile der Verzinsungsdauer berechnet nach

30/360-Tage-Methode
act/360-Tage-Methode (Geldmarkt)
act/act-Methode (Kapitalmarkt)

1.3 Zinsstaffelrechnung

$$\text{Zinsen} = \frac{\text{Zinszahl}}{\text{Zinsdivisor}} = \frac{\text{Zz}}{\text{ZD}} = \frac{\#}{ZD}$$

$$\# = \frac{\text{Kapital} \bullet \text{Tage}}{100}$$

$$\text{ZD} = \frac{360}{p}$$

1.4 Berechnung des Endwerts von m konstanten regelmäßigen unterjährigen Zahlungen R (Rente) nach 1 Jahr bei linearer Verzinsung und gegebenem Jahreszinssatz i

1.4.1 bei vorschüssiger Zahlung

$$K_1 = R\left(m + \frac{m+1}{2}i\right)$$

1.4.2 bei nachschüssiger Zahlung

$$K_1 = R\left(m + \frac{m-1}{2}i\right)$$

2. Zinseszinsrechnung (exponentielle Verzinsung) im Zwei-Punkte-Fall

(einmalige Kapitalanlage – einmaliger Rückfluss)

2.1 Ermittlung des Endwerts K_n eines Anfangskapitals K_0 nach n Verzinsungsperioden mit Hilfe des Aufzinsungsfaktors q^n

$$K_n = K_0\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n = K_0(1+i)^n = K_0 q^n$$

2.2 Unterjährige Zinseszinsrechnung

Wenn ein Anfangskapital K_0 im Verlaufe des Jahres m-mal mit dem Periodenzinssatz j_m verzinst wird, dann gilt für den Zusammenhang zwischen dem Periodenzinssatz j_m, dem Jahreszinssatz i, dem Anfangskapital K_0 und dem Endkapital nach 1 Jahr K_1

$K_0(1 + j_m)^m = K_1 = K_0(1 + i)$, woraus folgt

$$(1 + j_m)^m = 1 + i$$

2.2.1 Berechnung des Endwerts K_{nm}, wenn ein Anfangskapital K_0 über n Jahre verzinst wird und innerhalb jeden Jahres m-mal mit dem Periodenzinssatz j_m:

$$K_{nm} = K_0(1 + j_m)^{n \bullet m}$$

In kaufmännischen Anwendungsfällen wird der unterjährige Periodenzinssatz j häufig zeitproportional aus dem nominellen Jahreszinssatz i_{nom} abgeleitet. Wenn das Zinsjahr aus m gleichlangen unterjährigen Zinsperioden besteht, ergibt sich so der relative Periodenzinssatz

$$j_{rel} = \frac{i_{nom}}{m}$$

2.2.2 Ableitung des effektiven Jahreszinssatzes i_{eff} aus dem nominellen Jahreszinssatz i_{nom} bei unterjähriger Verzinsung mit dem relativen Periodenzinssatz j_{rel}

$$i_{eff} = \left(1 + \frac{i_{nom}}{m}\right)^m - 1$$

2.2.3 Ermittlung des zum Jahreszinssatz i konformen Periodenzinssatzes j_m

$$j_m = \sqrt[m]{1+i} - 1$$

3. Rentenrechnung

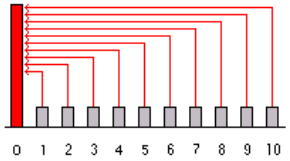
Konstante regelmäßige Zahlungen in gleichen Zeitabständen (Renten)

3.1 Rentenbarwert:

Berechnung des heutigen Werts von n künftigen Rentenzahlungen R mit Hilfe des Rentenbarwertfaktors

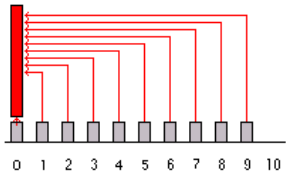
3.1.1 bei nachschüssiger (eine Periode nach heute beginnender) Zahlung

$$K_0 = R\frac{q^n - 1}{q^n(q-1)}$$



3.1.2 bei vorschüssiger (heute beginnender) Zahlung

$$K_0 = R\frac{q^n - 1}{q^n(q-1)}q$$

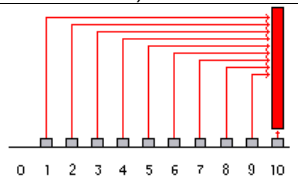


3.2 Rentenendwert:

Berechnung des Endwerts von n Rentenzahlungen R mit Hilfe des Rentenendwertfaktors

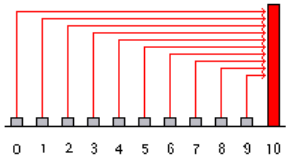
3.2.1 bei nachschüssiger Zahlung (Zahlungsbeginn eine Periode nach heute)

$$K_n = R\frac{q^n - 1}{q - 1}$$



3.2.2 bei vorschüssiger Zahlung (Zahlungsbeginn heute)

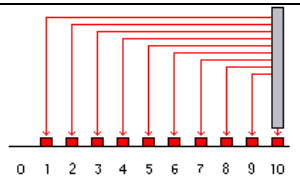
$$K_n = R\frac{q^n - 1}{q - 1}q$$



3.3 Umwandlung einer endfälligen Zahlung K_n in n Rentenzahlungen R mit Hilfe des Restwertverteilungsfaktors

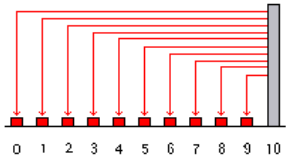
3.3.1 bei nachschüssiger Zahlung

$$R = K_n\frac{q-1}{q^n - 1}$$



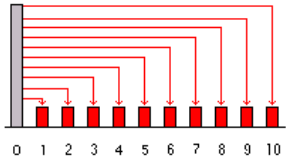
3.3.2 bei vorschüssiger Zahlung

$$R = K_n\frac{q-1}{(q^n - 1)q}$$



3.4 Umrechnung einer heutigen Zahlung K_0 in n konstante gleichwertige künftige Zahlungen (Annuitäten A) mit Hilfe des Annuitätenfaktors

$$A = K_0\frac{q^n(q-1)}{q^n - 1}$$



4. Rechnerische lineare Interpolation zur Ermittlung des internen Zinsfußes:

Eine rechnerische lineare Interpolation zur näherungsweisen Ermittlung des internen Zinsfußes kann mit Hilfe der Formel

$$p_{eff} = p_1 - C_{0_1}\frac{p_2 - p_1}{C_{0_2} - C_{0_1}}$$ vorgenommen werden.

Es bedeuten:

p_{eff} ... interner Zinsfuß,

p_1 und p_2 die gewählten Versuchszinssätze sowie

C_{0_1} und C_{0_2} die dazugehörigen Kapitalwerte.