Dr. Hans-Peter Jurscha
https://www.docju.de/

Finanzmathematische Grundlagen

Inhalt

1. Grundlagen und Grundbegriffe

Zinsen = Nutzungsentgelt für (zeitlich befristete) Kapitalüberlassung.

Die Höhe der Zinsen hängt ab

(1) vom Kapitalbetrag, der verzinst wird,
(2) vom vereinbarten Zinssatz,
(3) von der Dauer der Kapitalüberlassung (Laufzeit),
(4) von der Art der Zinsberechnung.

Der Zinssatz i (vom engl. interest) gibt an, wie viel Zinsen für eine überlassene Geldeinheit zu zahlen sind.
Übliche Schreibweisen: $i = 0{,}05$ oder $i = 5\%$.
In der Regel bezieht sich der angegebene Zinssatz auf die Zeitspanne eines Jahres, erkennbar am Zusatz „p.a." („pro anno" oder „per annum").
Die Größe p bezeichnet den Zinsfuß. Dieser gibt an, wie viel Zinsen für 100 überlassene Geldeinheiten zu zahlen sind.
Somit gilt $i = p/100$ (z.B. $p = 5 \rightarrow i = 5/100 = 0{,}05 = 5\%$).

K_0 bezeichnet im Fall einer Kapitalanlage den anfänglichen Stand des Kapitals, im Falle einer Kapitalaufnahme den anfänglichen Schuldenstand.

K_n bezeichnet den Stand des Kapitals bzw. der Schuld am Ende des betrachteten Zeitraums von n Perioden (Endwert).

Zinstermine (= Zinszuschlagtermin = Zinsverrechnungstermin) = Zeitpunkte, zu denen die Zinsen fällig werden.

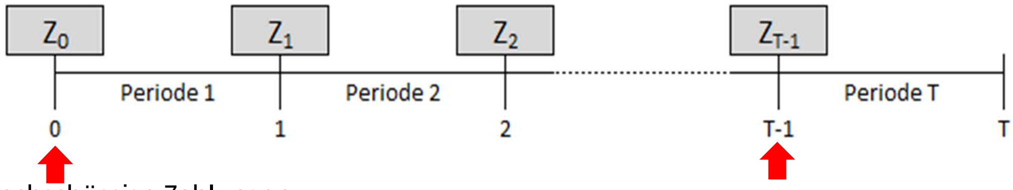
Zinsperiode = Zeitraum zwischen zwei Zinszuschlagterminen.

Verzinsungsmodelle

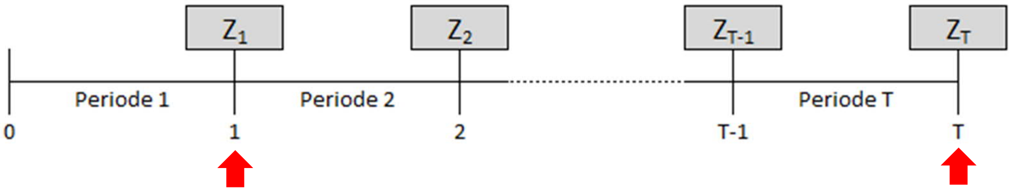
Lineare (einfache) Verzinsung	Zinseszins (exponentielle Verzinsung)
Zinsen werden zeitanteilig verrechnet und erst am Ende der Laufzeit dem Kapitalzugeschlagen. Innerhalb der Laufzeit existiert kein Zinszuschlagtermin.	Zinsen werden nach jeder Zinsperiode dem Kapital hinzugefügt und tragen von da an selbst wieder Zinsen. Innerhalb der Laufzeit liegen ein oder mehrere Zinszuschlagtermine.

Bei Zahlungsreihen sind vorschüssige und nachschüssige Zahlungen zu unterscheiden:

Vorschüssige Zahlungen:
Die Zahlungen Z_0, Z_1, ..., Z_{T-1} erfolgen jeweils zu Beginn der Perioden 1, ..., T.



Nachschüssige Zahlungen:
Die Zahlungen Z_1, Z_2, ..., Z_T erfolgen jeweils am Ende der Perioden 1, ..., T.



2. Einfache Zinsrechnung

2.1. Jährliche lineare Verzinsung

E2.1-1 Ein Investor legt heute (zum Zeitpunkt t = 0) einen Betrag von 300 € für drei Jahre an. Der Zinssatz beträgt 4% p.a. bei einfacher Verzinsung. Wie entwickelt sich das Vermögen im Zeitablauf?

Zeitpunkt t	Vermögen K_t	Zinsen für die Periode [t; t+1]
0		
1		
2		
3		

Wie kann der am Laufzeitende fällige Betrag direkt aus dem Anfangskapital ermittelt werden?

$$K_n =$$

E2.1-2 Ein Schuldner zahlt an den Gläubiger den Geldbetrag von 11.970 EUR und tilgt damit seine Schuld einschließlich der Zinsen. Wie hoch war die ursprüngliche Schuld, wenn er das Geld vor 4 Jahren mit 6,5% p.a. Zinsen von einem Freund ausgeliehen hat?

E2.1-3 Für ein zu gleichen Teilen vererbtes Grundstück im Wert von 24.000 EUR zahlt der Nutzer an seinen Miterben, der auf die Nutzung verzichtet hat, zu einem späteren Zeitpunkt einen Betrag von 15.315 EUR. Wann wurde das Grundstück übertragen, wenn 4,25% p.a. Zinsen vereinbart waren?

E2.1-4 Bei welcher Laufzeit würde sich ein Kapital bei 8% p.a. und einfachen Zinsen verdoppeln?

E2.1-5 Eine Erbschaft von 55.000 EUR, welche in 3 Jahren auszuzahlen ist, wird unter Abzug von 4% jährlichen Zinsen schon heute ausgezahlt. Welcher Betrag kann dem Berechtigten ausgezahlt werden?

$$K_0 =$$

E2.1-6 Für eine Geldanlage gelten folgende Bedingungen:
Der Anleger zahlt beim Kauf einen geringeren Betrag, als er später bei Einlösung am Fälligkeitstag zurückerhält. Die Zinsen für die Zeit vom Tag der Kaufpreiszahlung bis zum Fälligkeitstag werden im Voraus vom Nennwert abgezogen. Die Abschlagsprozentsätze pro Jahr („Verkaufszinssätze“) betragen bei einer Laufzeit von einem Jahr 3,66%, bei einer Laufzeit von 2 Jahren 3,55%.

a) Welcher Kaufpreis ist jeweils zu zahlen für einen Nennwert von 500 EUR
   a. bei einer Laufzeit von genau 1 Jahr und einem Verkaufszinssatz von 3,66%,
   b. bei einer Laufzeit von genau 2 Jahren und einem Verkaufszinssatz von 3,55%?
b) Welche Verzinsung erreichte der Käufer bei einjähriger Laufzeit?

2.2.Unterjährige lineare Verzinsung

Problemstellung: Wie hoch ist der Zinsbetrag, wenn ein nachschüssiger Jahreszinssatz vereinbart worden ist, aber seit der Anlage eines Anfangskapitals K_0 weniger als ein Jahr vergangen ist?

$$Z = K \cdot \frac{p}{100} \cdot \frac{Laufzeit\ in\ Tagen}{Jahreslänge\ in\ Tagen}$$

In unterschiedlichen Anwendungsbereichen sind unterschiedliche Zinskonventionen üblich.

	30/360	act/act	act/360
Laufzeit (Zinstage)	grundsätzlich 1 Monat = 30 Tage	kalendermäßig	kalendermäßig
Jahreslänge	360 Tage	kalendermäßig	360 Tage
Anwendungsbereich	Sparkonten, Kontokorrentkonten, Festgeldkonten, Ratenkredite, langfristige Darlehen	Kapitalmarkt, deutsche bürgerliche Zinsrechnung	Geldmarkt, Anleihen mit variabler Verzinsung (FRN)

E2.2-1 Berechnen Sie die Zinsen für einen Kapitalbetrag von 10 Mio. € bei einem Zinssatz von 2% p.a., Laufzeit 01.07.(einschließlich) bis 31.12. (einschließlich).

a) nach 30/360-Tage-Methode
b) nach act/act-Methode
c) nach act/360-Tage Methode

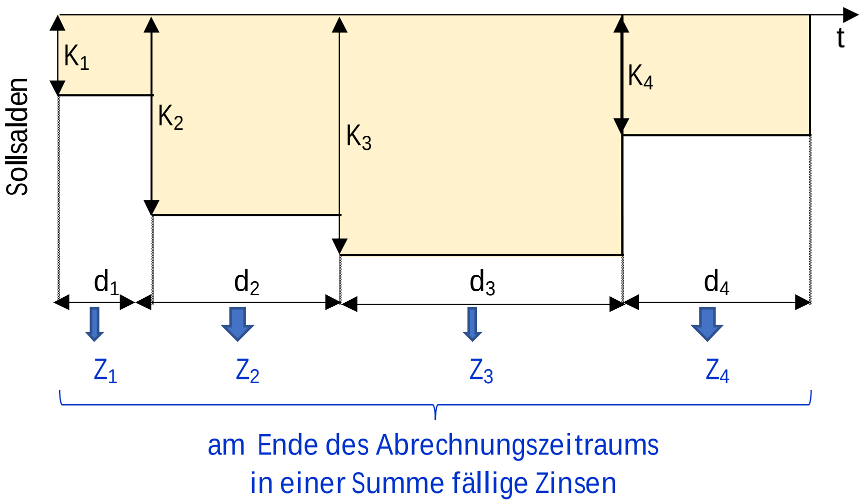
E2.2-2 Auf einem Kontokorrentkonto ergaben sich im Verlaufe des ersten Quartals die folgenden Salden:

Wert	Saldo	Tage	S#	Ü#
31.12.01	S 1.500,00			
16.01.02	S 4.000,00			
22.02.02	S 3.500,00			
05.03.02	S 7.000,00			
17.03.02	S 6.500,00			

Der Sollzinssatz betrug 12% p.a., der Zinssatz für geduldete Überziehungen 16% p.a.
Es stand eine Kreditlinie in Höhe von 4.000 € zur Verfügung.

Wie hoch ist die Zinsbelastung am Quartalsende?

<u>Zinsstaffelrechnung mit Zinszahlen</u>
Auf einem laufenden Konto wird eine Kreditlinie genutzt. Der Saldo dieses Kontos ändert sich durch Ein- und Auszahlungen, d.h. der linear zu verzinsende Kapitalbetrag ändert sich mit jeder Kontobewegung. Am Ende des vereinbarten Abrechnungszeitraums sollen die aufgelaufenen Zinsen in Rechnung gestellt werden.



Die Zinsen für die einzelnen Phasen der Kreditbeanspruchung ergeben sich jeweils aus der Höhe des beanspruchten Kapitalbetrags (K_1, K_2, K_3 usw.), der Dauer, über die der jeweilige Kapitalbetrag zu verzinsen ist (d_1, d_2, d_3 usw.) und dem Zinssatz. Hätten wir also z.B. die Abrechnung eines Kontos vorzunehmen, bei dem im Verlauf der Abrechnungsperiode 90 verschieden Salden zustande gekommen wären, müssten die für diese Periode insgesamt fälligen Zinsen so berechnet werden:

$$Z = K_1 \cdot \frac{p}{100} \cdot \frac{d_1}{360} + K_2 \cdot \frac{p}{100} \cdot \frac{d_2}{360} + \cdots + K_{90} \cdot \frac{p}{100} \cdot \frac{d_{90}}{360}$$

Das ist mit Ihrem Taschenrechner sicher kein Problem. Stellen Sie sich aber bitte einmal vor, Sie müssten eine solche Aufgabe schriftlich (ohne jegliches Hilfsmittel außer Papier und Stift) lösen. Worin besteht dann das rechnerische Problem? Sie müssten 90 Divisionen durchführen!
Vor dieser Problematik standen auch die Kaufleute in grauen Vorzeiten. Sie entwickelten deshalb eine bis heute übliche Methode, mit der sich solche Berechnungen auf einfachste Weise durchführen lassen.
Durch Ausklammern von p/360 ergibt sich:

$$Z = \left(\frac{K_1 \cdot d_1}{100} + \frac{K_2 \cdot d_2}{100} + \cdots + \frac{K_{90} \cdot d_{90}}{100}\right) \cdot \frac{p}{360}$$

Wir führen das Symbol # ein, um etwas Platz zu sparen

$$\# = \frac{K \cdot d}{100} = \text{"}Zinszahl\text{"}$$

und formen noch ein wenig um:

$$Z = \frac{\#_1 + \#_2 + \cdots + \#_{90}}{\frac{360}{p}} = \frac{Summe\ der\ Zinszahlen}{Zinsdivisor}$$

Zinszahlen sind auf ganze Zahlen zu runden. Für das Berechnen der Zinszahlen werden jetzt nur noch das Dividieren durch 100 sowie die Multiplikation benötigt (die bei mangelhaften Fertigkeiten auch durch das Addieren ersetzt werden kann). Statt 90mal muss nur noch einmal dividiert werden.

3. Zinseszinsrechnung

3.1. Jährliche exponentielle Verzinsung

E3.1-1 Ein Investor legt heute (zum Zeitpunkt t = 0) einen Betrag von 300 € für drei Jahre an. Der Zinssatz beträgt 4% p.a. Die Zinsen werden am Ende eines jeden Laufzeitjahres dem Kapital zugeschlagen und im Folgejahr mit verzinst. Wie entwickelt sich das Kapital im Zeitablauf?

Zeitpunkt t	Kapital K_t	Zinsen für die Periode [t; t+1]
0		
1		
2		
3		

Wie kann der am Laufzeitende fällige Betrag direkt aus dem Anfangskapital ermittelt werden?

$$K_n =$$

E3.1-2 Welchen Betrag müssen Sie zu Jahresbeginn auf einem Sparkonto mit 3% p.a. Verzinsung anlegen, wenn Sie 5 Jahre später über 20.000 EUR verfügen wollen?

E3.1-3 Wie hoch ist die effektive Verzinsung Ihres Kapitals, wenn Sie heute 12.000 EUR anlegen und in genau 6 Jahren 18.571,36 EUR zurückerhalten?

E3.1-4 Über wie viel Jahre müssen einen Betrag von 8.000 EUR anlegen, damit bei einer Verzinsung von 6% p.a. ein Endkapital in Höhe von 12.029,04 EUR bereitsteht?

E3.1-5 In welchem Zeitraum verdoppelt sich ein Kapital bei einer Anlage zu 8% p.a. bei einer Verzinsung mit Zinseszins?

E3.1-6 Welche effektive Verzinsung wurde bei zweijähriger Geldanlage aus Aufgabe E1.1-6 erreicht?

E3.1-7 Ein Geldbetrag wird zunächst 2 Jahre lang mit 3% p.a., dann weitere 4 Jahre mit 3,5% p.a. und schließlich noch weitere 6 Jahre mit 4% p.a. mit Zinseszins verzinst.
Wie hoch ist die effektive Verzinsung über den gesamten Anlagezeitraum?

E3.1-8 Ein Anfangskapital von 10.000 EUR ist innerhalb von 5 Jahren auf 12.000 EUR gewachsen. Welcher Endwert ist nach weiteren 5 Jahren zu erwarten, wenn sich die Verzinsung nicht ändert?

3.2.Unterjährige exponentielle Verzinsung

Bei unterjähriger Verzinsung ist die Zinsperiode kürzer als ein Jahr; es erfolgen innerhalb des Jahres also mehrere Verzinsungen mit den daraus resultierenden Zinseszinseffekten

Das Jahr wird dabei gewöhnlich in m gleich lange Zinsperioden unterteilt. Nach jeder Zinsperiode werden die Zinsen berechnet, indem ein Bruchteil des nominellen Jahreszinssatzes i_{nom} angewandt wird.

$$relativer\ Periodenzinssatz\ = j_m = \frac{i_{nom}}{m}$$

Die so ermittelten Zinsen werden dem Kapital zugeschlagen und in der folgenden unterjährigen Zinsperiode mitverzinst.

E3.2-1 Welche Endwerte K_1 ergeben sich bei einem Anfangskapital K_0 = 100.000 € nach einem Jahr in Abhängigkeit von der Anzahl der Zinsperioden m bei einem nominellen Zinssatz i_{nom} = 4% p.a.? Wie hoch ist der jeweilige effektive Jahreszinssatz i_{eff}?

	m = 1	m = 2	m = 3	m = 4
K_1				
i_{eff}				

E3.2-2 Für einen Dispositionskredit gilt ein Sollzinssatz von 11% p.a. Wie hoch ist der tatsächliche (="effektive") Jahreszinssatz, wenn das Konto vierteljährlich oder monatlich abgerechnet wird?

E3.2-3 Sie haben Ihr Geld auf einem Termingeldkonto „geparkt", wo es mit 3% p.a. verzinst wird. Der Anlagezeitraum beträgt 1 Monat. Mit Ihrer Bank haben Sie vereinbart, dass eine automatische Verlängerung (Prolongation) erfolgt, wenn Sie keine anderslautende Weisung erteilen. Zwischenzeitlich aufgelaufene Zinsen sollen dann dem Kapital zugeschlagen und mit verzinst werden.
Welche effektive Verzinsung erreichen Sie bei unverändertem Zinssatz?

E3.2-4 Wie kann man bei einem Sparkonto bei einem angegebenen Zinssatz von 3% p.a. eine Verzinsung erreichen, die höher als 3% p.a. ist?

E3.2-5 Ein Investor legt 300 € zum nominellen Zinssatz von 4% p.a. an. Die Verzinsung erfolgt unterjährig bei 6 Zinsterminen pro Jahr. Wie hoch ist der Endwert nach fünf Jahren?

E3.2-6 Welchen Betrag müssen Sie zu Jahresbeginn auf einem Sparkonto mit einem Nominalzinssatz von 3% p.a. und vierteljährlicher Verzinsung anlegen, wenn Sie 5 Jahre später über 20.000 EUR verfügen wollen?

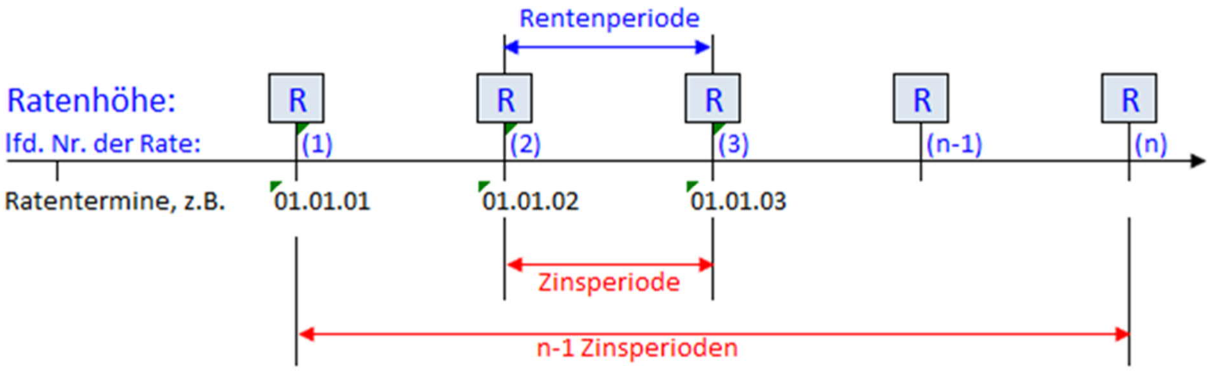
E3.2-7 Sie können Ihr Geld zu 3,5% p.a. bei jährlicher Verzinsung anlegen. Alternativ können Sie auch eine Anlageform mit vierteljährlicher Verzinsung wählen. Wie hoch müsste der nominelle Jahreszinssatz sein, damit Sie die gleiche effektive Verzinsung wie bei jährlicher Verzinsung erreichen?

E3.2-8 Einem Kreditnehmer werden zwei Verzinsungsarten zur Auswahl angeboten: entweder 8% p.a. bei vierteljährlicher Verzinsung oder 8,2% bei jährlicher Verzinsung. Welche Variante empfehlen Sie dem Kreditnehmer?

4. Rentenrechnung

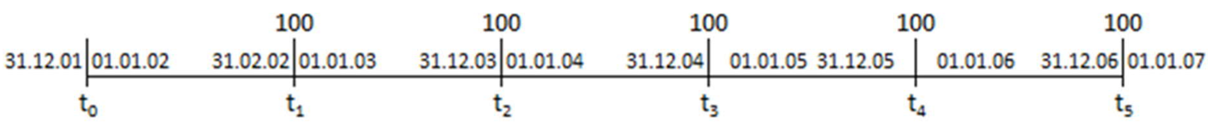
Eine n-malige Rente ist eine Zahlungsreihe, die aus n <u>gleichbleibenden Zahlungen</u> (Raten) der Höhe R besteht, die <u>in gleichen Zeitabständen</u> aufeinander folgen.

4.1.Rentenperiode = Zinsperiode



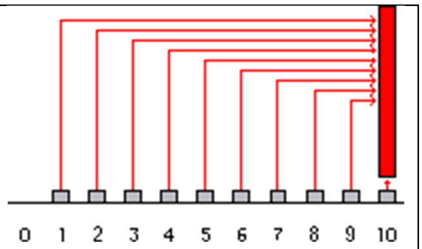
Bei n Ratenterminen liegen zwischen der 1. Rate und der letzten Rate genau n-1 Zinsperioden.

E4.1-1 In der Silvesternacht 01/02 fasst Student LUSTIG einen eisernen Sparbeschluss: Weil er im Verlaufe des Jahres 02 sein Studium erfolgreich abzuschließen und anschließend einen gut dotierten Job anzutreten gedenkt, will er künftig Konsumverzicht üben: Er hat beschlossen, ab Anfang 03 jeweils zu Jahresbeginn fünfmal einen gleichbleibenden Betrag in Höhe von 100 EUR auf seinem Sparkonto zu 3% p.a. anzulegen.

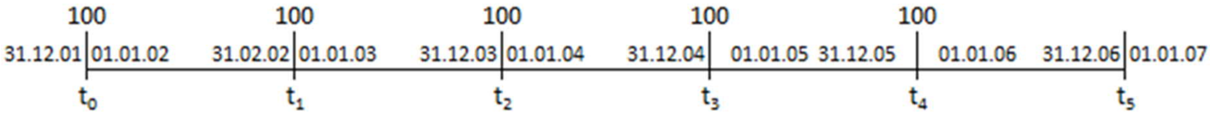


Über welchen Geldbetrag könnte er dann Anfang 07 verfügen, wenn er es tatsächlich schafft, sein ehrgeiziges Ziel zu realisieren?

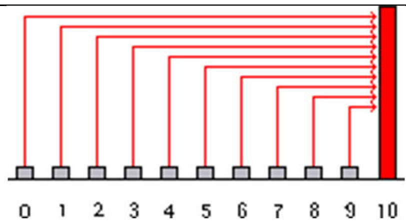
K_n =



E4.1-2 Über welchen Geldbetrag könnte er Anfang 07 verfügen, wenn er sein Vorhaben eskaliert und seine 5-Jahres-Ansparaktion bereits Anfang 02 beginnt?

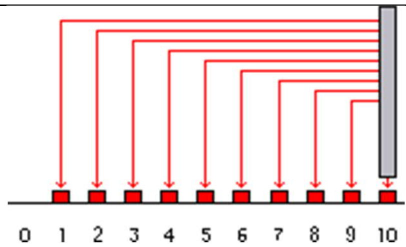


K_n =



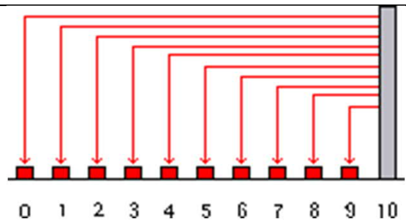
E4.1-3 Welchen Betrag müsste er in fünf Jahresraten - beginnend Anfang 03 - anlegen, damit er Anfang 07 über 20.000 EUR verfügen kann?

R =



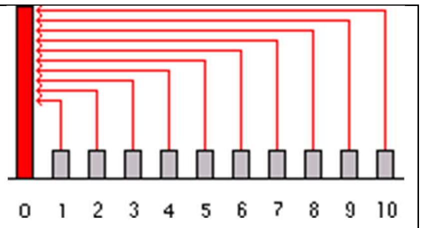
E4.1-4 Wie hoch wäre die erforderliche Sparrate, wenn er bereits Anfang 02 mit seinem Vorhaben beginnt, um nach Zahlung von 5 Raten und einem Wartejahr Anfang 07 über 20.000 EUR verfügen zu können?

R =



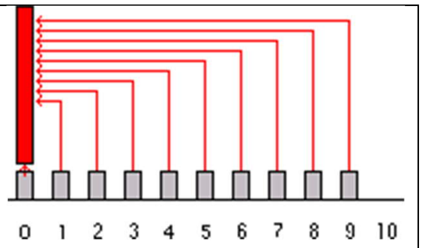
E4.1-5 Weil ihm als Gastgeber der Party momentan sowohl Getränke als auch Geld ausgegangen sind, kommt LUSTIG auf eine noch viel genialere Idee:
Viel angenehmer wäre es doch, die künftig möglichen Ersparnisse bereits heute zu verprassen. Seine Kommilitonen unterstützen ihn in diesem Vorhaben, denn ihr Durst ist mindestens so groß wie ihr Vertrauen in LUSTIGs künftige Zahlungsfähigkeit. Bei einem Zinssatz von 3% p.a. sind sie bereit, Lustig sofort den Gegenwert für die ab Anfang 03 erwarteten fünf aufeinanderfolgenden Ratenzahlungen in Höhe von je 100 EUR bereitzustellen. Wie viel Geld kommt auf diese Weise zusammen?

$K_0 =$



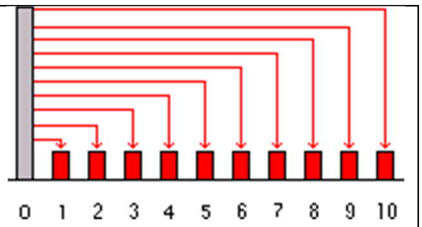
E4.1-6 Nebenbei: Wie hoch wäre der Barwert der Rente, wenn sie vorschüssig gezahlt werden würde?

$K_0 =$



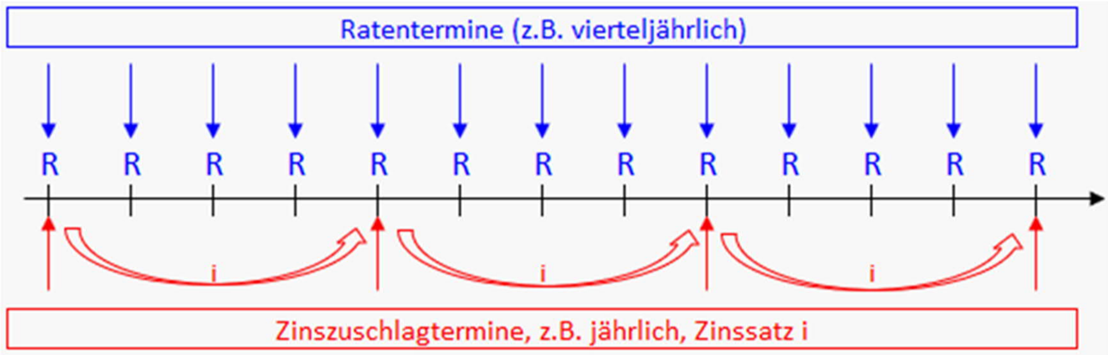
E4.1-7 Zurück zu LUSTIGs Überlegung in Frage E3.1-5. Eigentlich reichen für die Beendigung der laufenden Veranstaltung – scharf kalkuliert – 25,02 EUR. Den Rest des soeben vereinnahmten Geldes könnte LUSTIG verwenden, um einem seiner Mitstudenten aus dessen finanziellem Engpass zu helfen. LUSTIG würde ihm den betreffenden Betrag zu 5% p.a. als Darlehen überlassen. Wie würde LUSTIGS künftige Liquiditätsrechnung aussehen, wenn dieses Darlehen durch fünf gleiche Raten bedient werden würde? Die erste Rate wäre Anfang 03 fällig.

Annuität =



E4.1-8 Sie möchten in neun Jahren 10.000 € angespart haben. Die Bank garantiert Ihnen einen konstanten Zinssatz von 3% p.a. bei jährlicher Verzinsung.
Welchen Betrag müssen Sie gleich zu Beginn anlegen, wenn Sie – beginnend in einem Jahr, letztmalig nach neun Jahren – jedes Jahr zusätzlich 700 € ansparen können?

4.2. Zinsperiode > Rentenperiode



E4.2-1 Ein Sparer legt regelmäßig am Monatsende 100 EUR auf einem Sparkonto an, wo das Geld im Verlaufe des Jahres linear mit 3% p.a. verzinst wird. Zum jeweiligen Jahresende erfolgt die Zinskapitalisierung. Er beginnt damit im Januar des Jahres 01.

a) Wie hoch ist der Kontostand nach erfolgter Zinskapitalisierung am Ende des Jahres 01? Über welches Kapital kann er am Ende des Jahres 10 verfügen?

$K_1 = R^* =$
$K_n =$

b) Wie hoch wäre sein Endkapital zum Jahresende 01 bzw. 10, wenn er einen Monat früher (also genau zu Jahresbeginn) mit der Realisierung seines Sparplans beginnen würde?

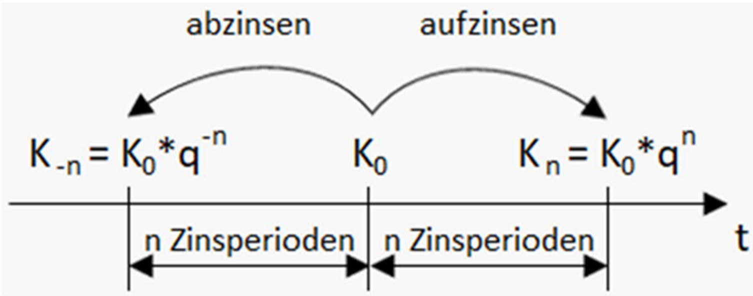
$K_1 = R^* =$
$K_n =$

E4.2-2 Wie hoch ist der Barwert einer monatlichen Rente in Höhe von 1.000 €, die 15 Jahre lang vorschüssig gezahlt wird? (i = 2,0% p.a.)

E4.2-3 Ein heute 55-jähriger hat in 10 Jahren Anspruch auf eine monatliche vorschüssige Betriebsrente von 600 €. Durch welche Gegenleistung kann diese heute bei einem Zinssatz von 4% p.a. abgelöst werden, wenn eine Lebenserwartung von 77 Jahren angenommen wird?

5. Das Äquivalenzprinzip der Finanzmathematik bei exponentieller Verzinsung

Durch eine heutige Kreditaufnahme ist es möglich, Zahlungseingänge, die erst in der Zukunft erfolgen werden, bereits heute zu nutzen. Durch Anlage von heute verfügbarem Geld lassen sich künftige Zahlungseingänge generieren. Diese zeitliche Transformation von Zahlungen kann mathematisch durch Auf- bzw. Abzinsen nachgebildet werden. Bei exponentieller Verzinsung ergibt sich folgendes Bild:



Damit wird eine zu einem bestimmten Zeitpunkt erfolgende Zahlung in eine zu einem früheren oder späteren Zeitpunkt erfolgende gleichwertige (äquivalente) Zahlung umgerechnet.

E5-1 Unter der Annahme, dass Kapitalbeträge exponentiell mit 4% p.a. wachsen ist eine heutige Zahlung von 100 € genau so viel wert ...

a) ... wie eine Zahlung in Höhe von [€] in 20 Jahren

(Legt man heute 100 € an, kann man in 20 Jahren über ....€ verfügen,
wenn man in 20 Jahren über ....€ verfügen will, muss man heute 100 € anlegen,
verpflichtet man sich, in 20 Jahren ....€ zu zahlen, kann man heute über 100 € verfügen.)

b) ... oder eine Zahlung in Höhe von [€] vor 20 Jahren.

(Hat man vor 20 Jahren .... angelegt, verfügt man heute über 100 €,
hat man vor 20 Jahren einen Kredit über.............. € aufgenommen, sind heute 100 € fällig.)

Zwei Zahlungen K_0 und K_n (K_0 fällig im Zeitpunkt 0, K_n fällig im Abstand von n Zinsperioden bzgl. 0) heißen (unter Verwendung von Zinseszinsen und dem Periodenzinssatz i) äquivalent, wenn zwischen ihnen die Beziehung

$$K_n = K_0(1+i)^n = K_0\, q^n$$

besteht.
Ist n positiv, so liegt K_n zeitlich um n Zinsperioden später als K_0; ist n negativ, so liegt K_n zeitlich um n Zinsperioden früher als K_0.

Welcher Stichtag zum Vergleich gewählt wird, ist gleichgültig. Sind zwei zu unterschiedlichen Zeitpunkten fällige Zahlungen äquivalent bezüglich eines Zeitpunktes, so auch in Bezug auf jeden anderen Zeitpunkt:

E5-2 Prüfen Sie, ob die beiden folgenden Zahlungen bei einem Kalkulationszinssatz von 10% p.a. und exponentieller jährlicher Verzinsung äquivalent sind:
Zahlung A beträgt 100,00 € und ist heute (t_0) fällig. Zahlung B beträgt 146,41 € und ist in 4 Jahren (t_4) fällig.

Stichtag	Wert der Zahlung A	Wert der Zahlung B
t_0	100,00 €	
t_4		146,41 €
t_3		
t_{20}		
t_{-20}		

Zur Berechnung der Zeitwerte sind beliebige Umwege oder Stufen statthaft.

Prämissen des Äquivalenzprinzips:[1]

„Jeder verfügbare Kapitalbetrag wird - wenn erforderlich, beliebig lange – zum Kalkulationszinsfuß angelegt. Jeder zukünftig fällige Kapitalbetrag kann zu jedem früher gelegenen Zeitpunkt als Kredit in Höhe seines finanzmathematischen Barwerts aufgenommen werden. Dabei müssen Anlagezinssatz (Habenzinssatz) und Aufnahmezinssatz (Sollzinssatz) stets identisch sein. Werden nur aufgezinste Endwerte verwendet, ist diese Prämisse entbehrlich ...

Die Höhe des verwendeten Auf-/Abzinsungs-Zinssatzes (Kalkulations-zinssatzes) hängt nicht von der Laufzeit oder Kapitalhöhe ab.

Auf-/Abzinsungsprozesse können beliebig weit in Zukunft oder Vergangenheit erfolgen.

Auf-/Abzinsungsprozesse erfolgen mit Hilfe der (reinen) exponentiellen Verzinsung ...“

[1] Tietze, Jürgen: Einführung in die Finanzmathematik, Wiesbaden 2015, S. 70

Von besonderem Interesse bei der Aufnahme oder Anlage von Kapital ist die Beantwortung der Frage, unter welchen Bedingungen Zahlungen zu anderen Zahlungen äquivalent sind.

Zur Beantwortung dieser Frage ist vom Äquivalenzprinzip und einer entsprechenden Äquivalenzgleichung

Leistung = Gegenleistung

auszugehen. Auf dieser Basis lassen sich verschiedene Problemstellungen bearbeiten

E5-3 Wir stellen heute (t_0) zeitlich befristet einen Geldbetrag zur Verfügung. Als Gegenleistung erwarten wir die spätere Rückzahlung dieses Geldbetrages zuzüglich des vereinbarten Nutzungsentgeltes (Zinsen).
Wie müssen die Konditionen gestaltet sein, damit Leistung und Gegenleistung gleichwertig sind?
Es ist exponentielle Verzinsung vereinbart.

	Leistung in t_0	Spätere Gegenleistung	Laufzeit	Kalkulationszinssatz
a)	94.000,00 €	€	10 Jahre	2,00 % p.a.
b)	€	100.000,00 €	10 Jahre	2,00% p.a.
c)	94.000,00 €	100.000,00 €	Jahre	2,00% p.a.
d)	94.000,00 €	100.000,00 €	10 Jahre	% p.a.

E5-4 Ein Gläubiger und sein Schuldner haben sich auf einen Zinssatz von 8% p.a. bei exponentieller Verzinsung geeinigt. Im Ergebnis dieser Vereinbarung müsste der Schuldner entweder in drei Jahren (in t_3) einen Betrag von 10.000 € zahlen oder eine der folgenden Verpflichtungen erfüllen, um damit das gewährte Darlehen zu tilgen sowie die Zinsen zu zahlen:

a) eine einmalige Zahlung heute (t_0)
b) eine einmalige Zahlung in t_5 (5 Jahren ab heute)
c) fünf jährliche gleichhohe Zahlungen, erste Rate in einem Jahr (in t_1)
d) fünf gleichhohe jährliche Zahlungen, erste Rate sofort (in t_0).

Wie hoch müssten die äquivalenten Zahlungen bei den genannten Varianten jeweils sein?

	t_0	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5
				10.000 €		
a)						
b)						
c)						
d)						

6. Investitionsrechnerische Anwendungen

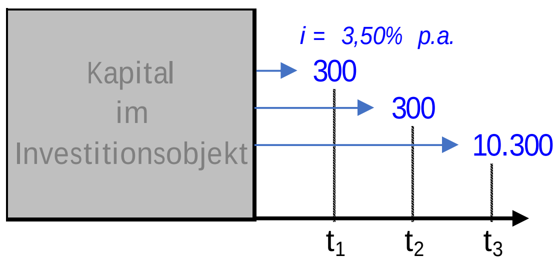
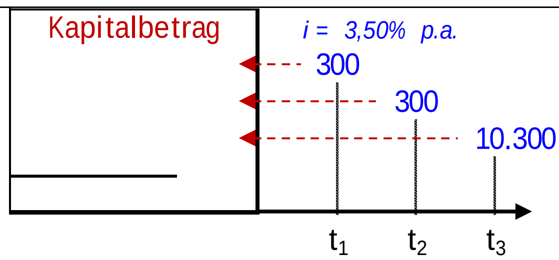
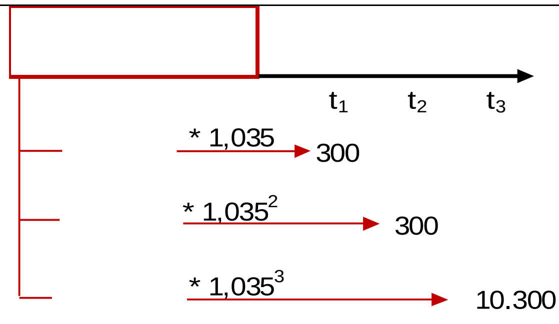
Das finanzmathematische Äquivalenzprinzip wird im Rahmen der dynamischen Verfahren der Investitionsrechnung genutzt. Mit seiner Hilfe lassen sich solche Fragen beantworten, wie z.B.

- Wie werthaltig ist ein Investitionsobjekt?
- Sind zu erbringende Leistung und zu erwartende Gegenleistung äquivalent, also gleichwertig?
- Ist die Investition im Vergleich mit Alternativen vorteilhaft?
- Welche Verzinsung des investierten Kapitals (Rendite) wird erreicht?

6.1 Der Ertragswert einer Investition

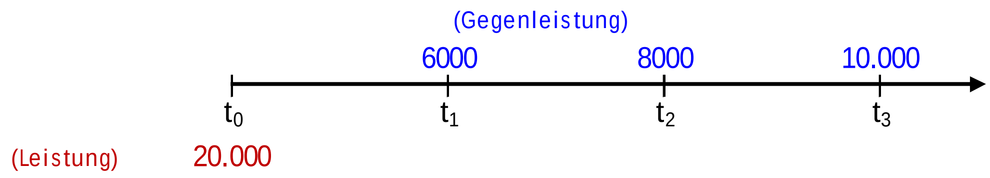
Vor Erwerb eines Investitionsobjekts muss dessen Werthaltigkeit bestimmt werden, um zu einer entsprechenden Preisvorstellung zu gelangen. Diese Bewertung kann auf unterschiedlichen Grundlagen beruhen und mit verschiedenen Methoden vorgenommen werden.

- Erste Möglichkeit: Es wird der Substanz- oder Sachwert des Investitionsobjekts, z.B. basierend auf (fortgeführten) Anschaffungs- oder Herstellungskosten, ermittelt.
- Zweite Möglichkeit: Es wird ermittelt, wie viel das Investitionsobjekt auf Basis seiner künftigen Überschüssen wert ist. Bei dem für den Bezugstermin t_0 ermittelten Gesamtwert handelt es sich um den heutigen ERTRAGSWERT des Investitionsobjekts (Was ist das Objekt heute wert, wenn man von den „Erträgen“ ausgeht, die es künftig liefern wird?).

Fundamentale Annahme: 1. Alle künftigen Nettogeldzuflüsse haben ihren Ursprung in einem sich verzinsenden Kapitalbetrag. Sie resultieren aus dem exponentiellen Wachstum dieses Kapitals. 2. Die Stärke der Verzinsung (der Zinssatz) ist für bestimmte Investitionsobjekte gegeben.	
Auf Basis dieser Annahmen wird auf die Höhe des im jeweiligen Investitionsobjekt vorhandenen Kapitals geschlossen. Der Ertragswert stellt mathematisch den Barwert künftiger Einzahlungsüberschüsse dar.	
Entspricht der investierte Geldbetrag exakt dem Ertragswert, verzinst er sich genau zum kalkulierten Zinssatz.	

6.2 Die Kapitalwertmethode

E6.2-1 Ein Investor beabsichtigt den Erwerb eines Investitionsobjekts, das in einem Jahr 6.000 €, in zwei Jahren 8.000 € und in drei Jahren 10.000 € liefern wird. Der Kaufpreis ist in Form einer Einmalzahlung zu entrichten. Bei heutiger Zahlung (d.h. in t_0) würde der Kaufpreis 20.000 € betragen.



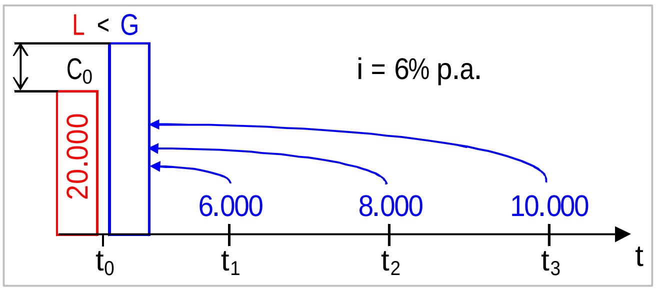
Prüfen Sie, ob Leistung und Gegenleistung bei einem Kalkulationszinssatz von 6% p.a. und exponentieller Verzinsung äquivalent sind.

Die Gegenleistung besteht hier aus mehreren Zahlungen, deren Gesamtwert zunächst zu ermitteln ist. Achtung: Zwei (oder mehr) zu unterschiedlichen Zeitpunkten fällige Zahlungen dürfen nur dann zu einem (zeitbezogenen) Gesamtwert zusammengefasst werden, wenn sie zuvor auf einen gemeinsamen Bezugstermin auf-/abgezinst wurden.
Auch der Vergleich des Werts der Leistung mit dem Gesamtwert der Gegenleistung kann nur zu einem gemeinsamen Bezugstermin erfolgen.

	Bezugstermine			
	t_0	t_1	t_2	t_3
Gesamtwert der Gegenleistung G				
Wert der Leistung L	20.000 €			
Differenz				
Wertverhältnis G / L				

Sind Zahlungen zu einem Stichtag nicht äquivalent, sind sie es auch nicht zu beliebigen anderen Stichtagen.
Die nicht äquivalenten Leistungen haben zu jedem Stichtag dasselbe Wertverhältnis.
Die Differenz zwischen nicht äquivalenten Zahlungen an einem Stichtag kann auch direkt ermittelt werden, indem die bereits ermittelte Differenz eines anderen Stichtages auf- bzw. abgezinst wird.

Die Prüfung auf Äquivalenz von Leistung und Gegenleistung ist zu jedem Stichtag möglich. In der Investitionsrechnung wird als Bezugszeitpunkt gewöhnlich t_0, der Beginn des Investitionsvorhabens, genutzt. Die Differenz zwischen barwertiger Leistung und barwertiger Gegenleistung wird dann als KAPITALWERT C_0 der Investition bezeichnet.



$$C_0 = \frac{e_1}{q} + \frac{e_2}{q^2} + \cdots + \frac{e_n}{q^n} - \frac{a_1}{q} - \frac{a_2}{q^2} - \cdots - \frac{a_n}{q^n} - I_0$$

mit e_t ... Einzahlung der Periode
a_t ... Auszahlung der Periode
I_0 ... Anfangsinvestitionssumme in t_0

Einzahlungen und Auszahlungen einer Periode können zum Überschuss der Periode $ü_t$ zusammengefasst werden:

$$C_0 = \frac{ü_1}{q} + \frac{ü_2}{q^2} + \cdots + \frac{ü_n}{q^n} - I_0$$

Mathematisch lässt sich der Kapitalwert somit definieren als:

Barwert investitionsbedingter Einzahlungen
- Barwert investitionsbedingter Auszahlungen
= Kapitalwert der Investition

E 6.2-2 Wie kann der Kapitalwert ökonomisch interpretiert werden?

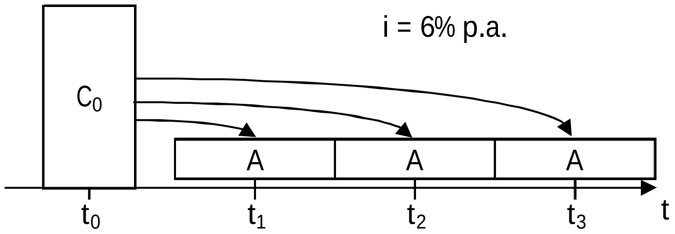
Jahr	Restschuld zu Jahresbeginn	Gegenleistung am Jahresende	6% Zinsen am Jahresende	Tilgung am Jahresende
1	20.000	6.000		
2		8.000		
3		10.000		

E6.2-3 Was lässt sich aus der Nichtäquivalenz von Leistung und Gegenleistung über die erreichte Verzinsung des investierten Kapitals ableiten?

E6.2-4 Welche Entscheidungsregeln lassen sich ableiten?

6.3 Die Annuitätenmethode

Der Kapitalwert ist der Barwert des Totalgewinns, der als Überschuss über die kalkulierte Verzinsung hinaus erwirtschaftet wird. Die Annuitätenmethode periodisiert diesen Gewinn. Sie stellt einen finanzmathematischen durchschnittlichen jährlichen Überschuss DJÜ dar.



E6.3-1 Wie hoch ist die Annuität im Beispielfall 6.2-1?

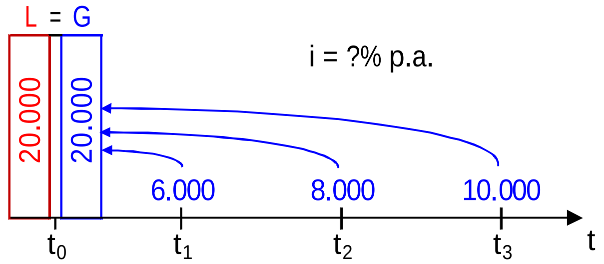
E6.3-2 Wie hoch ist die erreichte Verzinsung, wenn sich die prognostizierten Einzahlungsüberschüsse jeweils um die Annuität verringern?

E6.3-3 Eine Investition mit einer Laufzeit von 6 Jahren liefert bei einem Kalkulationszinssatz von 8% einen negativen Kapitalwert (– 10.000 €). Um welchen Betrag müssen die jährlichen Einzahlungsüberschüsse des Investitionsobjekts erhöht werden, damit die gewünschte Mindestverzinsung erreicht wird?

6.4 Effektivzinsberechnung

Mit der Kapitalwertmethode wurde ermittelt, wie groß die Differenz zwischen barwertiger Leistung und barwertiger Gegenleistung ist und ob diese Differenz für den Investor vorteilhaft oder nachteilig ist.

Bei Ermittlung der Effektivverzinsung mit Hilfe der Methode des internen Zinsfußes wird jener Zinssatz bestimmt, welcher Leistung und Gegenleistung gleichwertig werden lässt.



$$20.000 = \frac{6.000}{1 + i_{eff}} + \frac{8.000}{\left(1 + i_{eff}\right)^2} + \frac{10.000}{\left(1 + i_{eff}\right)^3} = \frac{6.000}{q} + \frac{8.000}{q^2} + \frac{10.000}{q^3}$$

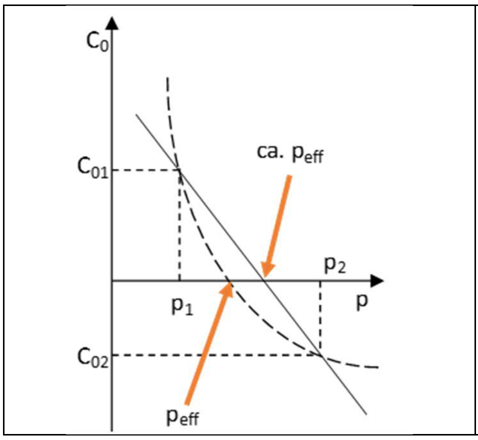
Durch Umformen dieser Äquivalenzgleichung erhält man

$$0 = \frac{6.000}{q} + \frac{8.000}{q^2} + \frac{10.000}{q^3} - 20.000$$

Der gesuchte Zinssatz ist somit jener Kalkulationszinssatz, welcher zu einem Kapitalwert von Null führt. Es gilt also, die Nullstelle der Kapitalwertfunktion zu bestimmen.

Bei Äquivalenzgleichungen höheren Grades (es müssen mehr als zwei Zinsperioden überbrückt werden) kann die Lösung nicht ohne weiteres gewonnen werden. Es sind iterative Näherungsverfahren erforderlich. In der Praxis nutzt man hierfür ein Kalkulationsprogramm (Funktion „IKV" in Excel). In anormalen Situationen (wie z.B. Klausuren, in denen lediglich ein nicht programmierbarer Taschenrechner als Hilfsmittel zugelassen ist) muss man sich z.B. mit der „Regula Falsi" (Sekantennäherungsverfahren) behelfen.

Man startet mit einem ersten Versuchszinssatz p_1 und prüft, ob dieser zu einem Kapitalwert Co_1 von Null führt. Ist das nicht der Fall wird ein zweiter Versuch unternommen. Nunmehr kann auf Basis dieser zwei Wertepaare der Schnittpunkt der Sekante mit der Abszisse ermittelt wird. Man erhält die Nullstelle einer linearen Funktion, die in der Nähe der Nullstelle der Kapitalwertfunktion liegt:



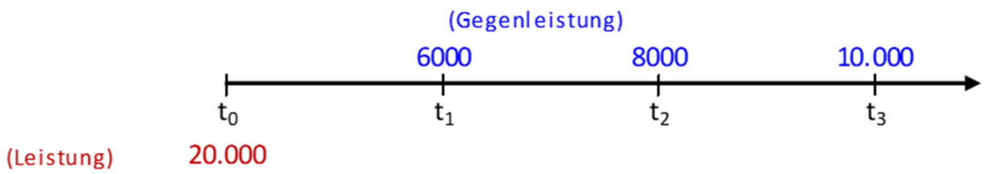
Formel zur rechnerischen linearen Interpolation

$$p_{eff} = p_1 - Co_1 \frac{p_2 - p_1}{Co_2 - Co_1}$$

Durch mehrmaliges Wiederholen mit präzisierten Versuchszinssätzen kann man sich weiter an die tatsächliche Nullstelle der Kapitalwertfunktion annähern.
HINWEIS: In der Klausur reicht die Berechnung mit 2 Versuchszinssätzen.

Auch die Annäherung mit Hilfe der TABLE-Funktion des Casio-Taschenrechners ist möglich. Falls Ihnen das nicht (mehr) geläufig ist – bitte in der Bedienungsanleitung nachschlagen!

<u>E6.4-1</u>



Wie hoch ist die effektive Verzinsung, ermittelt mit Hilfe der Methode des internen Zinssatzes? Verwenden Sie als Versuchszinssätze 8,6% und 9,2%.

<u>E6.4-2</u> Der Investor aus dem vorangegangenen Beispiel legt die im zufließenden Geldbeträge zu 6% p.a. wieder an. Am Ende des dreijährigen Investitionszeitraum möchte er wissen, wie sich sein ursprünglich investiertes Kapital effektiv verzinst hat. Helfen Sie ihm!

7. Tilgungsrechnung

E7-1 Ein Kredit in Höhe von 500.000 EUR ist innerhalb von 5 Jahren (incl. Zinsen) zurückzuzahlen. Der Zinssatz beträgt 8% p.a.
Stellen Sie für jede der folgenden Kreditkonditionen einen Tilgungsplan auf.

a) Tilgung in einem Betrag am Ende des 5. Jahres; Zinszahlung jährlich.

b) Rückzahlung incl. angesammelter Zinsen in einem Betrag am Ende des 5. Jahres (vorher erfolgen also keinerlei Zahlungen des Kreditnehmers).

c) Ratentilgung (gleichbleibende Tilgungsbeträge).

E7-2 Ein Darlehen über 100.000 EUR soll in 10 Jahren bei einem Zinssatz von 10% p.a. durch gleichhohe Jahresraten verzinst und getilgt werden.

a) Wie hoch muss die jährliche Rate (Annuität) sein, um dieses Ziel zu erreichen?

b) Wie formuliert die Bank die Darlehenskonditionen gegenüber ihrem Kunden?

E7-3 Der Darlehensbetrag beläuft sich auf 100.000 EUR, der Zinssatz beträgt 10% p.a., die Annuität 11.000 EUR/Jahr.

a) Wie hoch ist die Restschuld nach Zahlung der 3. Annuität? (Berechnung ohne Tilgungsplan)

b) Wie hoch ist die Tilgung im 4. Jahr? (Berechnung ohne Tilgungsplan)

c) Überprüfen Sie die Richtigkeit Ihrer Ergebnisse mit Hilfe eines Tilgungsplans.

E7-4 Das Darlehen über 100.000 EUR soll bei einem Zinssatz von 10% p.a. mit Annuitäten von 11.000 EUR/Jahr zurückgezahlt werden.

a) Welche Laufzeit hat dieses Darlehen?

b) Nach wie viel Prozent der Gesamtlaufzeit sind 60% des Darlehens getilgt?